

## Série d'exercices n°7

### Solution de l'exercice 1

1.  $Q_{ABC} = \Delta U_{ABC} - W_{ABC} = +800 - (-500) = 1300 \text{ J}$ .
2.  $W_{ABC} = W_{AB} = P_A(V_A - V_B) = P_A(V_A - V_C)$   
 $W_{CDA} = W_{CD} = P_C(V_C - V_D) = -P_C(V_A - V_C)$   
 Comme  $P_A = 5P_C$  on trouve  $W_{CD} = -\frac{W_{ABC}}{5} = +100 \text{ J}$ .
3. Sur le cycle  $\Delta U = 0$  car l'énergie interne est une fonction d'état, d'où  $\Delta U_{CDA} = -\Delta U_{ABC}$ . De plus  $Q_{CDA} = \Delta U_{CDA} - W_{CDA}$ . On trouve donc  $Q_{CDA} = -\Delta U_{ABC} - W_{CDA} = -800 - 100 = -900 \text{ J}$ .
4.  $Q_{CD} = \Delta U_{CD} - W_{CD} = (\Delta U_{CDA} - \Delta U_{DA}) - W_{CD} = (-\Delta U_{ABC} - \Delta U_{DA}) - W_{CD} = (-800 - 500) - 100 = -1400 \text{ J}$ .

### Solution de l'exercice 2

1. L'énergie interne de l'ensemble ne varie pas, car le système ne reçoit ni travail (paroi rigide), ni chaleur (paroi adiabatique).
2. Sachant que l'énergie interne du système ne varie pas, ses valeurs avant et après le retrait de la paroi doivent être identiques :

$$n_1 c_v T_i + n_2 c_v T_i = (n_1 + n_2) c_v T_f,$$

où  $T_i$  dénote la température de chaque gaz avant le retrait de la paroi. On en déduit  $T_f = T_i$  : la température des gaz ne varie pas.

3. On constate que l'énergie interne n'est plus proportionnelle à la température, du fait de la présence d'un terme de correction en  $n^2/V$ . En utilisant la conservation de l'énergie interne du système complet (i.e. de l'ensemble des deux gaz) comme à la question précédente, on trouvera que  $T_i \neq T_f$  : la température n'est pas constante!

Dans le cas général on trouve  $T_f = T - \frac{a}{(n_1 + n_2)C_{V,m}} \left( \frac{n_1^2}{V_1} + \frac{n_2^2}{V_2} - \frac{(n_1 + n_2)^2}{V_1 + V_2} \right)$ ;

Dans le cas de l'énoncé :  $T_f = T - \frac{a(n_1 - n_2)^2}{2C_{V,m}V(n_1 + n_2)}$ .

- 4.

$$p_f = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

AN :  $p_f = 1.5 \text{ bar}$ .

### Solution de l'exercice 3

1. On commence par écrire le bilan de forces qui agissent sur le volume infinitésimal :

$$\vec{F}_{\text{tot}} = -\rho dV g \vec{u}_z + PS\vec{u}_z - (P + dP)S\vec{u}_z,$$

où le premier terme représente le poids du volume infinitésimal ( $g$  est l'accélération de gravité et  $dV = Sdh$ ). A l'équilibre  $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$  et donc :

$$dP = -\rho g dh. \quad (1)$$

2. On considère une masse d'air  $m$  contenue dans un volume variable  $V$ . Puisqu'on considère le cas adiabatique, on a :

$$PV^\gamma = \text{const.}$$

En divisant par  $m^\gamma$  de part et d'autre, on peut trouver la pression :

$$P = \text{const.} \times \left(\frac{m}{V}\right)^\gamma = \text{const.} \times \rho^\gamma$$

Cette expression est valide pour toute altitude, en particulier au niveau du sol. On obtient donc le ratio des densités volumiques :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma}$$

En substituant cette relation dans l'équation (1), on obtient :

$$dP = -\rho_0 g \left(\frac{P}{P_0}\right)^{1/\gamma} dh.$$

On multiplie les deux termes par  $P^{-1/\gamma}$  pour obtenir :

$$P^{-1/\gamma} dP = -\frac{\rho_0 g}{P_0^{1/\gamma}} dh,$$

dont la solution est :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = -\frac{\rho_0 g}{P_0^{1/\gamma}} h + A,$$

avec  $A$  constante à déterminer. En imposant  $P(0) = P_0$ , on trouve :

$$P_{\text{tropo}}(h) = P_0 \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{P_0} h\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

où

$$h_0 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0 g}.$$

La variation de la température avec l'altitude peut être dérivée en utilisant l'équation d'état du gaz parfait :

$$T_{\text{tropo}}(h) = \frac{MP(h)}{R\rho(h)} = \frac{MP_0}{R\rho_0} \left(1 - \frac{h}{h_0}\right) = T_0 \left(1 - \frac{h}{h_0}\right),$$

où l'on a identifié  $T_0 = MP_0/(R\rho_0)$  avec la température au sol.

*Application numérique:* En utilisant les valeurs  $\rho_0 = 1,23 \text{ kg m}^{-3}$  et  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ , on trouve  $h_0 = 29 \text{ km}$ . Ceci nous donne une variation de  $-T_0/h_0 \approx -0,01 \text{ K m}^{-1}$  pour



la température. Le taux de variation de la pression avec l'altitude s'obtient, pour de petites valeurs de  $h$ , à l'aide d'un développement limité :

$$P_{tropo}(h) \approx P_{tropo}(0) + h \left. \frac{dP_{tropo}}{dh} \right|_{h=0} = P_{tropo}(0) - \frac{P_0}{h_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} h,$$

soit une variation de  $-\gamma/(\gamma-1) \cdot (P_0/h_0) \approx -12 \text{ Pa m}^{-1}$  pour la pression. Ces valeurs sont en accord avec les ordres de grandeur que l'on observe dans la nature et qui sont utilisées par exemple en aéronautique.

- À la question précédente, on a trouvé que la seule caractéristique du gaz qui intervient dans l'expression de  $P(h)$  est  $\gamma$ . Ainsi, deux gaz avec des  $\gamma$  identiques auront le même profil de pression. C'est par exemple le cas de l'oxygène et de l'azote, qui sont tous deux des molécules diatomiques, c'est-à-dire avec le même nombre de degrés de liberté et donc les mêmes valeurs de  $c_v$  et  $c_p$ . Votre ami a donc tort ! Il aurait par contre eu raison s'il avait parlé du  $\text{CO}_2$ , qui est une molécule composée de trois atomes et dont le coefficient adiabatique  $\gamma$  diffère de celui de l'oxygène et de l'azote.
- La loi des gaz parfaits peut s'écrire de la façon suivante :

$$PV = nRT \implies P = \frac{n}{V} RT = \frac{n}{m} \frac{m}{V} RT = \frac{1}{M} \rho RT$$

où  $M$  est la masse molaire de l'air. De là, on tire une expression pour la masse volumique  $\rho = \frac{MP}{RT_{\text{strat}}}$ , qu'on injecte dans l'équation 1 :

$$dP = -\frac{MPg}{RT_{\text{strat}}} dh \implies \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_{\text{strat}}} dh$$

On intègre entre  $h = h_{\text{trans}}$  et  $h > h_{\text{trans}}$  :

$$\int_{P_{\text{trans}}}^P \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_{\text{strat}}} \int_{h_{\text{trans}}}^h dh$$

$$\begin{aligned} \int_{P_{\text{trans}}}^P \frac{dP}{P} &= -\frac{Mg}{RT_{\text{strat}}} \int_{h_{\text{trans}}}^h dh \\ \implies \log \frac{P}{P_{\text{trans}}} &= -\frac{Mg}{RT_{\text{strat}}} (h - h_{\text{trans}}) \end{aligned}$$

$$P(h) = P_{\text{trans}} e^{-\frac{Mg}{RT_{\text{strat}}} (h - h_{\text{trans}})} = P_{\text{trans}} e^{-(h - h_{\text{trans}})/h_1}$$

avec  $h_1 = RT_{\text{strat}}/Mg$  et  $T_{\text{strat}} = (1 - h_{\text{trans}}/h_0) T_0$ .

- L'énergie potentielle d'une molécule quelconque dans la stratosphère est  $E_{\text{pot}} = mgh$ , où  $m$  dénote la masse de la molécule. D'après le postulat de Boltzmann, la probabilité de trouver cette molécule à une altitude  $h$  vaut donc :

$$p(h) = A \exp\left(-\frac{E_{\text{pot}}}{k_B T_{\text{strat}}}\right) = A \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T_{\text{strat}}}\right),$$

où  $A$  est une constante de normalisation. Sachant que le nombre de particules par unité de volume est proportionnel à  $p(h)$ , on en déduit :

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T_{\text{strat}}}\right),$$



avec  $\rho_0 = \rho(h_{trans})$ . Ainsi, la pression dans la stratosphère est :

$$\begin{aligned} P_{\text{strat}}(h) &= \frac{R\rho(h)T_{\text{strat}}}{M} \\ &= \frac{R\rho_0 T_{\text{strat}}}{M} \exp\left(-\frac{mg}{k_B T_{\text{strat}}}h\right) \\ &= P_{\text{trans}} \exp\left(-\frac{Mg}{RT_{\text{strat}}}h\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations  $k_B = R/\mathcal{N}_A$  et  $M = \mathcal{N}_A m$ .

## Solution de l'exercice 4

1. L'air suit une évolution adiabatique et réversible durant la montée et la descente. Donc en utilisant  $TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{const}$ , on obtient  $T_i P_i^{(1-\gamma)/\gamma} = T_f P_f^{(1-\gamma)/\gamma}$ . Comme l'altitude de la plaine est la même de chaque côté de la montagne :  $P_f = P_i$ , et donc  $T_f = T_i$ . La température de l'air en aval de la montagne est égale à la température en amont. Ce résultat n'explique donc pas le phénomène du foehn pour lequel  $T_f > T_i$ .
2. Quand la vapeur d'eau contenue dans l'air se condense pour former de l'eau liquide (nuages ou pluie), cette liquéfaction libère de la chaleur (chaleur latente de vaporisation). Le taux de diminution de la température de l'air humide avec l'altitude,  $r_h$ , est donc plus lent que celui de l'air sec  $r_s$ .
3. Quand l'air redescend sur l'autre versant, le taux d'humidité est plus faible car la masse d'air a perdu sa vapeur d'eau sous forme de pluie sur le versant amont de la montagne. Quand l'air commence à redescendre, il est comprimé et se réchauffe, la pression de vapeur saturante augmente et l'air n'est plus saturé en humidité et l'eau ne condense plus.

Pour calculer la température  $T_f$  de l'air en amont de l'obstacle, il suffit de suivre l'évolution de la température pendant la montée en considérant les différentes valeurs des taux de variation avec l'altitude. On nomme  $T_n$  et  $T_m$  la température de l'air à altitude  $n$  (base des nuages) et au sommet de la montagne (altitude  $h$ ). Ainsi :

$$\begin{aligned} T_n - T_i &= r_s n && \text{variation de } T \text{ entre le sol et l'altitude } n, \\ T_m - T_n &= r_h (h - n) && \text{variation de } T \text{ entre } n \text{ et le sommet.} \end{aligned}$$

On a donc :

$$T_m = T_i + r_h (h - n) + r_s n.$$

Comme l'air qui redescend en aval de la hauteur  $h$  jusqu'au sol est sec, le taux de variation avec l'altitude est  $r_s$ . Ainsi :

$$T_f - T_m = -r_s h.$$

En y substituant l'expression de  $T_m$  trouvée ci-dessus on obtient :

$$T_f = T_i + (r_h - r_s)(h - n).$$

Comme  $h - n > 0$  et  $r_h - r_s > 0$ , on obtient  $T_f > T_i$ , qui explique le phénomène du foehn. L'application numérique donne :

$$\begin{aligned} T_f &= 10 [^\circ\text{C}] + (-5 [^\circ\text{C}/1000 \text{ m}] + 9 [^\circ\text{C}/1000 \text{ m}]) \times (3000 [\text{m}] - 1500 [\text{m}]) \\ &= 16^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

4. La hauteur de la base des nuages vaut :

$$n = h - \frac{T_f - T_i}{r_h - r_s} = 3500 \text{ [m]} - \frac{22 \text{ [}^\circ\text{C]} - 10 \text{ [}^\circ\text{C]}}{-5 \text{ [}^\circ\text{C/1000 m]} + 9 \text{ [}^\circ\text{C/1000 m]}} = 500 \text{ m.}$$